Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»

И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.В. Семенов

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2021 года

по **МАТЕМАТИКЕ**

Москва, 2021

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике представляет собой форму государственной итоговой аттестации, проводимой в целях определения соответствия результатов освоения обучающимися основных образовательных программ среднего общего образования по математике требованиям федерального государственного образовательного стандарта. ЕГЭ проводится в соответствии с Федеральным законом от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» и Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования, утверждённым приказом Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512.

Контрольно-измерительные материалы (КИМ) единого государственного экзамена по математике представляют собой комплекты заданий стандартизированной формы, соответствующие спецификации и демонстрационному варианту. Содержание КИМ определяется на основе федерального компонента государственного стандарта основного общего и среднего (полного) общего образования (приказ Минобразования России от 05.03.2004 № 1089).

С 2015 г. ЕГЭ по математике проводится на двух уровнях: базовом и профильном. ЕГЭ базового уровня предназначен для проверки достижения участниками экзамена основных предметных результатов, в частности способности производить бытовые расчёты и использовать математические знания для решения задач, возникающих в повседневной жизни. ЕГЭ профильного уровня предназначен для проверки освоения более широкого круга математических понятий и методов, необходимых для продолжения математического образования. В связи с эпидемиологической ситуацией в России ЕГЭ базового уровня по математике в 2021 г., как и в 2020 г., не проводился.

Варианты КИМ составлены на основе спецификации и кодификаторов проверяемых элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных организаций.

КИМ ЕГЭ 2021 г. по математике профильного уровня сохранили преемственность с экзаменационной моделью прошлого года в тематике, примерном содержании и уровнях сложности заданий. Каждый вариант содержал 12 заданий с кратким ответом и 7 заданий с развёрнутым ответом. Задания относились к основным разделам курса математики: числа и вычисления, алгебра и начала математического анализа, геометрия, вероятность и статистика. Проверка логических навыков включена в большинство заданий и особенно проявлялась в требованиях к решению заданий с развёрнутым ответом.

Вариант экзаменационных материалов по математике профильного уровня состоит из 19 заданий, сгруппированных в две части. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня, часть 2 содержит 11 заданий повышенного и высокого уровней сложности. При этом задания 1–12 подразумевают краткий числовой ответ и оцениваются 0 или 1 баллом. Задания 13–19 политомические с развёрнутым ответом. В большинстве политомических заданий требования на промежуточные баллы определяются критериями однозначно за счёт разбиения задания на законченные по смыслу пункты.

Современная модель ЕГЭ по математике профильного уровня способна выявить по результатам экзамена несколько групп участников в соответствии с их уровнем предметной подготовки (табл. 1).

Таблица 1. Группы по уровню подготовки (профильный уровень)

Группа	1 (мин.)	2 (базовый)	3 (базовый)	4 (повыш.)	5 (высокий)
Границы первичных баллов	0–6	7–10	11–13	14–22	23–32
Границы тестовых баллов	0–27	33–50	56–68	70–86	88–100

Анализ выполнения заданий участниками по группам будет дан ниже. Традиционно важно выделение группы наиболее подготовленных участников, намеренных продолжать образование по техническим и математическим специальностям. В то же время экзамен содержит достаточный материал для диагностики общих математических умений, применяемых при изучении иных предметов, в быту и массовых профессиях. В большинстве своем эти задания сгруппированы в части 1 КИМ экзамена и охватывают широкий круг математических объектов, методов и практических сюжетов: оптимальный выбор, финансовая грамотность, бытовые расчёты, оперирование процентами, прикладная геометрия, оценка вероятностей событий и т.п.

Задания части 2, как дихотомические, так и политомические, предназначены для проверки математических знаний на уровне, необходимом для абитуриентов технических и математических специальностей. Традиционно в их число входит исследование функций, задачи по стереометрии, планиметрии, решение уравнений и неравенств, текстовая задача.

Действующая в последние годы модель ЕГЭ по математике обладает достаточным диагностическим потенциалом и послужила основой для разработки перспективной модели профильного и базового ЕГЭ и материалов для проведения ЕГЭ 2022 г.

Изменений в структуре и содержании КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня в 2021 г. по сравнению с 2020 г. не было.

Результаты участников профильного экзамена 2021 г. близки к результатам 2019 г. и несколько выше результатов 2020 г., что может быть связано с совершенствованием дистанционной формы обучения во многих регионах, где в 2020 г. могли наблюдаться значительные трудности с обеспечением доступа обучающихся и учителей к дистанционным учебным платформам.

Как важный результат ЕГЭ 2021 г. следует отметить некоторое улучшение результатов участников в части заданий базового уровня сложности в сравнении с прошлым годом. Процент выполнения заданий первых пяти задач части 1 в 2021 г. вернулся к показателям 2019 г.: все задания выполнены на 92% или выше. Значительно выросла доля участников экзамена, выполнивших геометрические задания 6 и 8. Незначительно снизился результат выполнения задания 7, требующего соотнесения графика и свойств функции и её производной.

В среднем уровень выполнения заданий 9–12 (задания части 2 с кратким ответом повышенного уровня) практически не изменился по сравнению с предыдущими годами. Наиболее трудным остаётся задание 12 по математическому анализу.

В результатах выполнения заданий части 2 существенные изменения по сравнению с прошлыми двумя годами также отсутствуют.

Продолжается тенденция предыдущих лет, связанная со снижением доли участников, получивших неполный балл в ряде заданий с развёрнутым ответом. Крайне малая доля участников получает неполный балл за задания 13 (уравнение с отбором корней на промежутке), 16 (алгебраическое неравенство), 17 (составление и исследование математической модели по тексту задачи). Таким образом, проявляется устойчивость роста качества обучения в образовательных организациях.

Следует понимать, что прямое сравнение результатов ЕГЭ по математике 2021 г. с результатами предыдущих годов является некорректным, поскольку в регламент государственной итоговой аттестации два года подряд вводились временные изменения. В 2021 г. Постановлением Правительства Российской Федерации[1] установлено, что выпускники, не планирующие поступать в вуз, могли не сдавать ЕГЭ по математике.

При этом заметен определенный рост результатов, в том числе на уровне высоких баллов, во все большем количестве регионов, что показывает рост доступности качественного образования как за счёт совершенствования дистанционных технологий, так и за счёт создания и расширения деятельности в регионах центров развития талантов школьников.

По результатам детального анализа типичных ошибок участников ЕГЭ прошлых лет и методических рекомендаций ФИПИ создано много печатных и электронных учебных ма-

[1] Постановление Правительства РФ от 26 февраля 2021 г. № 256 «Об особенностях проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования в 2021 году».

териалов, разъясняющих вопросы выполнения заданий части 2 КИМ; в большинстве регионов приняты и реализуются региональные программы развития математического образования; проект «Я сдам ЕГЭ», предоставление открытого доступа в регионах к проекту Центра педагогического мастерства Москвы привёл к заметному росту результатов участников, так как построены не на бесконечном решении вариантов прошлых лет, а на системном изменении преподавания с учётом индивидуальных траекторий развития каждого школьника.

Рост общественного запроса на качественное математическое образование, повышение роли математической грамотности как общественно значимого фактора проявились в увеличении востребованности ресурсов для самостоятельного дополнительного математического образования. В популярных учебно-диагностических системах зарегистрировались и выполняли тренировочные работы более 80% участников ЕГЭ 2020 г., в 2021 г. их число ещё выросло. В результате массового использования этих систем доля технических ошибок при заполнении бланков ответов существенно снизилась за последние два года, снизилось также количество вычислительных ошибок, поскольку учителя стали уделять больше внимания вычислительной культуре обучающихся в связи с запретом использования калькуляторов на экзамене.

Нужно отметить позитивное влияние актуальной экзаменационной модели ОГЭ на результаты ЕГЭ: включение несколько лет назад в КИМ ОГЭ практико-ориентированных заданий позволило выстроить единую систему требований в оценке качества математического образования. Включение в ОГЭ блока заданий по геометрии, обязательного для преодоления аттестационного порога, существенно сказалось на росте геометрической подготовки выпускников, важной для продолжения образования в технических вузах, и на уровне выполнения заданий по геометрии в ЕГЭ.

Рассмотрим типичные примеры заданий и прокомментируем результаты их выполнения. Для анализа выполнения заданий КИМ ЕГЭ использованы иллюстрации с заданиями из вариантов 2021 г., выполнявшихся наибольшим числом участников. Каждое задание выполняли не менее 8000 участников экзамена из разных регионов. Выборку можно считать репрезентативной.

Алгебра и начала математического анализа, базовый уровень

Задания 1, 2, 4, 5 относятся к заданиям базового уровня и выполняются большинством участников экзамена.

Задание 1. проверяет сформированность умения использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни. Для выполнения этого задания выпускник должен уметь выполнять арифметические действия с целыми числами. Проблемы у участников возникают на стадии интерпретации полученных результатов.

Пример 1.

1 В магазине вся мебель продаётся в разобранном виде. Покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 20% от стоимости купленной мебели. Шкаф стоит 3300 рублей. Во сколько рублей обойдётся покупка этого шкафа вместе со сборкой?

Комментарий.

Типичная ошибка – в ответе указана не общая стоимость, а только стоимость сборки.

По всей совокупности участников экзамена задание 1 выполняется на уровне 75,8/99,5%[2].

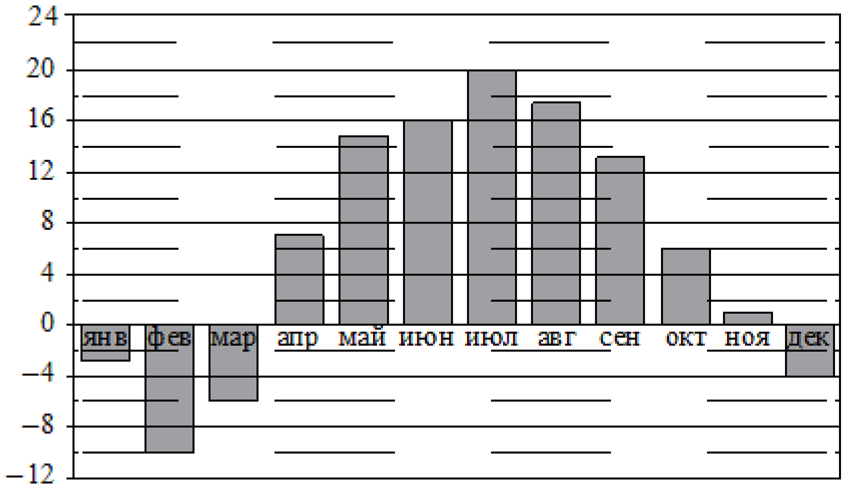
Задание 2. Задание проверяет сформированность умения анализировать информацию, представленную на диаграмме, графике. Для выполнения этого задания выпускник должен

[2] Здесь и далее первое число – процент выполнения участниками со слабой подготовкой, второе число – процент выполнения участниками с высоким уровнем подготовки.

находить наибольшее значение функции на заданном интервале. Ошибки, как правило, возникают из-за невнимательности при чтении условия.

Пример 2.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Москве за каждый месяц 2005 года. По горизонтали указываются месяцы; по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме, сколько месяцев среднемесячная температура была меньше −8 градусов Цельсия.



Комментарий.

Типичная ошибка в выполнении задания – неверно прочитанное условие: наиболее массовый неверный ответ 11 получается, если прочитать слово «меньше» как «больше».

Задание выполняется на уровне 86,1/99,3%.

Задание 4. Задание проверяет сформированность понятия «вероятность случайного события» и умения находить вероятность в простейших практических ситуациях. Проблемы у участников экзамена возникают из-за вычислительных ошибок, а у слабо подготовленных участников и из-за отсутствия сформированного понятия «вероятность».

Пример 3.

4 В сборнике билетов по химии 60 билетов, в трёх из которых встречается вопрос по теме «Белки́». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Белки́».

Комментарий.

Наиболее распространённая ошибка (1,1%) вычислительная: при делении 3 на 60 неверно поставлена запятая. Незначительная часть участников экзамена в ответе записала вероятность противоположного события. Это говорит о несформированности понятия «вероятность» при наличии механического навыка выполнения действий: участник экзамена помнит, что нужно делить 3 на 60 или 57 на 60, но что именно нужно делить угадывает.

Задание выполняется на уровне 52,8/99,6%. Этот показатель существенно вырос по сравнению с 2014 г., когда задание на расчёт вероятности впервые было включено в ЕГЭ.

Задание 5. Решение уравнения.

Пример 4.

5 Найдите корень уравнения $3^{x+2}=81$.

Комментарий.

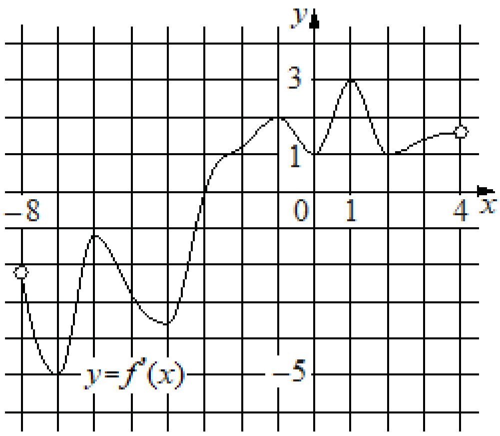
Задание выполняется на уровне 61,2/99,7%. Большинство ошибок вычислительные. Наиболее распространённый неверный ответ, скорее всего, получился у тех участников, кто посчитал, что $81=3^3$.

Задание 7 базового уровня сложности традиционно вызывает затруднения у участников экзамена.

Задание 7. Задание проверяет знание связи между характером монотонности функции и знаком её производной, умение по графику производной функции охарактеризовать свойства самой функции. Проблемы у участников возникают из-за невнимательного чтения условия задачи и непонимания связи свойств функции с её производной.

Пример 5.

7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8;4)$. В какой точке отрезка $[-7;-4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Комментарий.

Задание выполняется на уровне 13,8/93,2%. Типичным неверным ответом является –7 (35%) – левый конец указанного отрезка. Получение неверного ответа связано с тем, что участники ЕГЭ путали функцию с её производной. Эта ошибка типична на протяжении всех лет начиная с 2010 г., когда в ЕГЭ впервые была предложена задача на наглядное исследование функции по графику или по графику её производной.

Алгебра и начала математического анализа, повышенный уровень

Задания 9–12, 13, 15, 17 относятся к заданиям повышенного уровня сложности.

Задание 9. Задание проверяет сформированность умения по заданному значению одной тригонометрической функции от некоторого аргумента находить значение другой от того же аргумента. Задание проверяет знание основного тригонометрического тождества. Проблемы у участников возникают на стадии выполнения арифметических действий и определения знака тригонометрической функции.

Пример 6.

9 Найдите значение выражения $\dfrac{8\sin 94^\circ}{\sin 47^\circ \cdot \sin 43^\circ}$.

Комментарий.

Массовый неверный ответ 8 получается, если забыть множитель 2 в формуле синуса удвоенного аргумента. Таких ответов 18%.

Задание выполняется на уровне 11,9/98,7%.

Задание 10. Задание проверяет сформированность умения использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни. Для выполнения этого задания нужно уметь выразить одну из величин через другие, когда все величины связаны известной формулой, т.е. требуется решить простейшее уравнение. Проблемы у участников возникают на стадии чтения условия задачи или при подстановке данных в формулу.

Пример 7.

10 В розетку электросети подключена электрическая духовка, сопротивление которой составляет $R_1 = 54$ Ом. Параллельно с ней в розетку предполагается подключить электрообогреватель, сопротивление которого R_2 (в Ом). При параллельном соединении двух электроприборов с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление R вычисляется по формуле $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 36 Ом. Определите наименьшее возможное сопротивление электрообогревателя. Ответ дайте в омах.

Комментарий.

Типичный неверный ответ 18 связан с вычислительной ошибкой.

Задание выполняется на уровне 10,4/98,6%.

Задание 11. Задание проверяет сформированность умения использовать математические знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни. Для выполнения нужно уметь составить уравнение по условию задачи и верно интерпретировать результаты его решения.

Пример 8.

11 На изготовление 384 деталей первый рабочий тратит на 8 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 480 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 4 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Комментарий.

Типичный неверный ответ в таких задачах обычно является посторонним корнем полученного квадратного уравнения либо ответом на другой вопрос. В данном случае массовый неверный ответ 16 (производительность труда второго рабочего) дало около 8% участников.

Задание выполняется на уровне 4,7/94,0%.

Задание 12. Задание проверяет сформированность умения пользоваться математическим анализом и свойствами производной для исследования функции.

Пример 9.

12 Найдите точку максимума функции $y = 7 \cdot \ln(x-9) - 7x + 2$.

Комментарий.

5% дали ответ 9, который говорит о непонимании природы логарифма и/или о попытках угадывания ответа.

Задание выполняется на уровне 4,0/94,2%.

Задание 13. Задание проверяет сформированность умения решать уравнение и отбирать корни, принадлежащие числовому отрезку. Это задание решают преимущественно участники ЕГЭ с высоким и средним уровнями подготовки, а слабо подготовленные экзаменуемые к этому заданию приступают редко.

Пример 10.

13 а) Решите уравнение

$$4\sin^3 x + 4\sqrt{3}\cos^2 x + 3\sin x = 4\sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Комментарий.

Успешно решают это задание от 0,01% участников из слабой группы до 93,2% участников из сильной группы.

За последние годы результаты решения тригонометрических уравнений в ЕГЭ значительно выросли. В 2012–2014 гг. процент участников, полностью решавших тригонометрическое уравнение и отобравших корни, не превышал 10%. Отметим также важные изменения, происшедшие в подходах к решению этой задачи. Ещё несколько лет назад типичное решение уравнения содержало «формулу из учебника», которая за счёт множителя переменного знака описывает сразу обе серии решения простейшего тригонометрического уравнения. В последние годы всё чаще участники экзамена находят серии решения тригонометрического уравнения по отдельности, пользуясь тригонометрическим кругом для графической интерпретации. Это привело к общему росту понимания устройства тригонометрических функций, важного для продолжения образования в вузах.

Задание 15. Задание проверяет сформированность умения решать неравенства.

Пример 11.

15 Решите неравенство $16^{\frac{1}{x}-1} - 4^{\frac{1}{x}-1} - 2 \geq 0.$

Комментарий.

Задание 15 верно решают от 0% (слабая группа) до 94,1% (сильная группа) участников.

Неравенства решают преимущественно экзаменуемые с высоким и средним уровнями подготовки, а слабо подготовленные участники к этому заданию не приступают. Ошибки в выполнении задания 15 свидетельствуют о существующей проблеме в подготовке заметной доли выпускников – несформированности умения решать не только логарифмические неравенства, но и неравенства вообще. Основанием для этого вывода стали выявленные ошибки: неумение решать квадратные, дробно-рациональные неравенства; неумение находить и записывать решение системы неравенств; непонимание сути метода интервалов; выполнение неравносильных преобразований.

В последние годы, особенно в связи с задачами ЕГЭ, всё бóльшую популярность приобретает так называемый «обобщённый метод интервалов». Название метода стихийно возникло в учительской среде и не является общеупотребительным термином. Суть сводится к решению уравнения и определению знаков функции произвольного вида (не обязательно рациональной) на интервалах знакопостоянства. К сожалению, школьники, даже понимая суть метода, часто не могут грамотно описать последовательность своих действий и теряют логику рассуждений, пытаясь повторить решение по памяти или по аналогии с похожими примерами, которые они решали раньше, и, как следствие, допускают грубые ошибки.

Задание 17. Задание проверяет сформированность умения использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни. Для выполнения этого задания нужно уметь решать текстовую задачу с экономическим содержанием.

Пример 12.

17 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 тыс. рублей на 6 лет. Условия его возврата таковы:
— в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.
Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 498 тысяч рублей. Найдите r.

Комментарий.

Выполнение: от 0% (слабая группа) до 88% (сильная группа) участников. Участники экзамена, которые не смогли выполнить данное задание, делятся на две группы: те, кто не смог составить математическую модель решения (или составил её неверно), и те, кто допустил ошибки (как правило, вычислительные) при решении полученного уравнения. Следует отметить резкое снижение за последние годы доли участников экзамена, которые допустили ошибки при составлении математической модели. Это является следствием в том числе резкого усиления внимания к практико-ориентированным заданиям в школьном курсе. При этом рост сформированности культуры решения уравнений, безошибочного выполнения математических действий, несколько отстаёт, так как основы этого закладываются в 1–6 классах. Соответственно, заметное число участников ЕГЭ, которые, приступив к выполнению задания, не смогли решить его, верно составило уравнение, но из-за вычислительных ошибок не смогло получить правильный ответ.

Алгебра и начала математического анализа, высокий уровень

Задания 18 и 19 относятся к заданиям высокого уровня сложности.

Задание 18. Задание проверяет сформированность умения применять математические знания, исследовать уравнения и функции, их графики и взаимное расположение алгебраически заданных кривых.

Пример 13.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-a^2\right|=|x+a|\cdot\sqrt{x+a^2-2a}$$

имеет ровно два различных корня.

Комментарий.

Задача даёт возможность участнику экзамена, претендующему на поступление в вуз с высокими требованиями к уровню математической подготовки, показать умение верно проводить рассуждения, проверки, преобразования. Поэтому за задачу берутся в основном выпускники с высоким уровнем подготовки. Выполнение задания является одним из характерных признаков наиболее сильной группы участников. Хотя и в этой группе успеха в решении достигает лишь 11% при общем выполнении около 1%. Навыки, необходимые для верного выполнения данного задания, формируются на протяжении многих лет обучения математике.

Задание 19. Задание проверяет способность находить пути решения, комбинируя известные методы и алгоритмы. Особенность состоит в том, что практически все задания этой линии апеллируют к целочисленной арифметике, причём к фактам, известным из курса 5–7 классов.

Пример 14.

19 Отношение трёхзначного натурального числа к сумме его цифр — целое число.

а) Может ли это отношение быть равным 34?

б) Может ли это отношение быть равным 84?

в) Какое наименьшее значение может принимать это отношение, если первая цифра трёхзначного числа равна 4?

Комментарий.

Задача имеет исследовательский характер, требуя подчас проверки подтверждения или опровержения гипотез. Верное выполнения всего задания даёт возможность продемонстрировать готовность к продолжению образования в ведущих вузах. При этом первый пункт задачи имеет конструктивный характер и доступен многим участникам экзамена, поэтому последние годы задача стала приобретать популярность не только у наиболее сильной группы, но и у выпускников с недостаточной общей алгебраической подготовкой, но развитым логическим мышлением. Здесь важно, чтобы учитель верно сориентировал, показал на примерах, что первый пункт не требует специальных знаний – достаточно сообразительности и минимального терпения, чтобы обнаружить нужную математическую конструкцию.

Этим обстоятельством объясняются и результаты. На ненулевой балл решают задачу от 2,8% (слабая группа) до 47,1% (сильная группа) участников, а на полный балл – всего 3,2% участников из сильной группы. Следует отдельно отменить, что данное задание демонстрирует наименьший среди всех заданий с развернутым ответом разброс процентов выполнения между регионами.

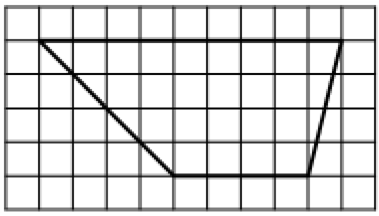
Геометрия, базовый уровень

Задания 3, 6, 8 относятся к заданиям базового уровня и выполняются заметно хуже алгебраических заданий этого уровня.

Задание 3. Задание проверяет умение применять знания из курса геометрии, сформированность наглядных представлений о геометрических фигурах, длине и площади фигуры.

Пример 15.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Комментарий.

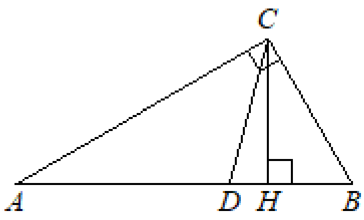
Распространённые ошибки связаны с подсчётом длин отрезков или решением другой задачи.

Задание выполняется на уровне 48,0/99,6%. Наихудший результат возникает тогда, когда срабатывает инертность мышления, и экзаменуемый, привыкший к подготовке на вариантах прошлых лет, вместо условия данной задачи воспринимает рисунок как иллюстрацию другой задачи (найдите среднюю линию трапеции, высоту и т.п.). Задания по геометрии «на клеточках» появились в ЕГЭ в 2010 г. и послужили значительному укреплению позиции геометрии в школе.

Задание 6. Задание проверяет сформированность умений выполнять действия с геометрическими фигурами, применять изученные геометрические факты.

Пример 16.

6 Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен $75°$. Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD, проведёнными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах.



Комментарий.

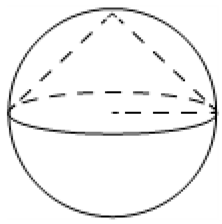
Задание выполняется на уровне 14,1/96,8%. Распространённый неверный ответ 15° (4,3%) дали участники, которые вписали в поле ответа промежуточный результат или по какой-то причине решили, что искомый угол равен углу A.

Задания на свойства отрезков, соединяющих вершину треугольника с точкой противолежащей стороны, относятся к самым распространённым в курсе геометрии 7 и 8 классов. Они ежегодно входят в КИМ ЕГЭ: вопрос может стоять об углах между высотой, медианой и биссектрисой в разных комбинациях. Результаты выполнения этих заданий за несколько лет существенно выросли. Тем не менее учителям следует обратить внимание на похожие задачи при работе с обучающимися из слабой и средней групп по подготовке. Эти задачи наглядны, и, один раз разобравшись в конструкции прямоугольного треугольника, обучающиеся, как правило, решают задачи этого типа уверенно.

Задание 8. Задание проверяет сформированность наглядных стереометрических представлений и соотношений между объёмами изученных пространственных фигур.

Пример 17.

8 Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 24. Найдите объём шара.



Комментарий.

Задание выполняется на уровне 11,4/96,5%. Распространённый неверный ответ 72 дали 11% участников экзамена. Это скорее всего связано с попыткой использовать множитель 1/3 из формулы объёма конуса без вникания в стереометрическую конфигурацию.

Задача о вписанном в шар, полушар или цилиндр конусе хорошо известна, приводится во всех учебниках геометрии. К сожалению, очень немногие школьники знают эту задачу как знаменитую задачу Архимеда. Если учитель вместо формул (или наряду с ними) показывает наглядное соотношение объёмов цилиндра и вписанных в него полушара и конуса, то обучающиеся не делают ошибок в сравнении объёмов этих тел, поскольку опираются не на механические вычисления, а на сложившийся образ.

Геометрия, повышенный уровень

Задания 14 и 16 относятся к заданиям повышенного уровня сложности. Эти задания с развёрнутым ответом решают в основном те, кто претендует на высокий балл.

Задание 14. Задание проверяет сформированность наглядных представлений об изученных стереометрических фигурах, а также умения строить сечения, проводить доказательства, пользуясь изученными фактами о взаимном расположении прямых и плоскостей, находить геометрические величины, пользуясь теоремами об объёмах и площадях поверхности геометрических тел.

Пример 18.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AD равна 14, высота SH равна 24. Точка K — середина бокового ребра SD, а точка N — середина ребра CD. Плоскость AKB пересекает боковое ребро SC в точке P.

а) Докажите, что прямая KP пересекает отрезок SN в его середине.

б) Найдите расстояние от точки P до плоскости SAB.

Комментарий.

Задание разбито на два пункта. Первый пункт считается выполненным, если проведено верное доказательство. Задачи на доказательство сейчас широко представлены в КИМ ЕГЭ, хотя первое время шли споры о допустимости заданий на доказательство в аттестационных задачах. Появление заданий на доказательство в ЕГЭ привело к возвращению этого традиционного и очень важного математического умения в школьный курс. Учителя всё больше внимания уделяют правильному применению фактов и теорем курса, развитию у обучающихся умения совершать логические переходы. Наиболее трудными, как правило, являются логические построения, связанные с доказательством от противного.

Процент выполнения задания 14 составляет 0/21,7.

Задание 16. Задача планиметрическая. Проверяет умение пользоваться изученными геометрическими фактами и теоремами, исследовать геометрические конфигурации на плоскости.

Пример 19.

16 Трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием AD и высотой BH вписана в окружность. Прямая BH вторично пересекает эту окружность в точке K.

а) Докажите, что прямые AC и AK перпендикулярны.

б) Прямые CK и AD пересекаются в точке N. Найдите AD, если радиус окружности равен 12, $\angle BAC = 30°$, а площадь четырёхугольника $BCNH$ в 8 раз больше площади треугольника KNH.

Комментарий.

Планиметрические задачи традиционно входили в состав вступительных испытаний технических и математических специальностей вузов. Выполнение задания 16 в ЕГЭ 2021 г. находится на уровне 14,2% на полный балл в наиболее сильной группе. Участники из слабой группы за задание 16, как правило, не берутся.

Растущий, но все еще относительно низкий процент выполнения геометрических заданий повышенного и высокого уровней сложности свидетельствует о сохраняющихся проблемах в преподавании геометрии. Одна из причин – рассмотрение тех типов задач, которые встречались на экзамене в предыдущие годы, а не обучение полноценной геометрии. Эта практика распространена повсеместно и касается, конечно, не только геометрии, но именно в геометрии ярче проявляются пагубные результаты, поскольку однотипные геометрические конфигурации различаются между собой гораздо больше, чем однотипные уравнения или неравенства.

Рассмотрим выполнение экзаменационной работы ЕГЭ 2021 г. участниками с различным уровнем математической подготовки. Традиционно по результатам ЕГЭ по математике участников можно условно разбить на пять групп: с минимальной подготовкой, две подгруппы с базовой подготовкой, с повышенным уровнем и высоким уровнем подготовки. Границы групп определяются, исходя из экспертной оценки соответствия выполнения экзаменационной работы требованиям вузов. В таблице 2 показаны условные границы групп.

Таблица 2. Группы по уровню подготовки (профильный уровень)

Группа	1 (мин.)	2 (базовый)	3 (базовый)	4 (повыш.)	5 (высокий)
Границы первичных баллов	0–6	7–10	11–13	14–22	23–32
Границы тестовых баллов	0–27	33–50	56–68	70–86	88–100
Численность групп (по данным на 16.06.2021) (тыс. человек) / %	46,7 (12,8%)	122,0 (33,4%)	79,8 (21,8%)	108,4 (29,6%)	8,8 (2,4%)
Численность групп в 2020 г. (тыс. человек) / %	53,5 (14,7%)	120,6 (33,1%)	78,4 (21,5%)	103,6 (28,4%)	8,2 (2,25%)

Численность группы 1, и абсолютная, и процентная, снизилась по сравнению с прошлым годом, но все ещё высока, несмотря на возможность получения в 2021 г. аттестата о среднем образовании без ЕГЭ по математике. Участие в профильном ЕГЭ значительного числа выпускников, не готовых преодолеть минимальный порог, по-прежнему остается проблемой, связанной и с их недостаточной информированностью, и с особенностями приёма в некоторые гуманитарные вузы, по-прежнему предъявляющие к абитуриентам требование о сдаче экзамена по математике профильного уровня.

Участники из **группы 1**, как правило, ограничиваются решением 10–12 заданий с кратким ответом и не приступают к задачам, требующим развёрнутых ответов. Задачи по геометрии и на понимание объектов и методов математического анализа выполняются участниками из этой группы крайне плохо. В большинстве своем это обучающиеся, слабо мотивированные к изучению математики. Их участие в профильном экзамене часто нецелесообразно.

Численность **группы 2** практически не изменилась по сравнению с прошлым годом. Эту группу можно охарактеризовать, как освоившую базовый курс, но не приобретшую устойчивых навыков. Это не позволяет им продолжать образование по технической специальности. Многочисленность группы 2 на профильном ЕГЭ по математике также часто объясняется противоречивыми требованиями ряда вузов к абитуриентам: обязательный профильный экзамен, при этом относительно невысокие требования к математической подготовке.

В отличие от группы 1, участники из группы 2 часто принимаются за решение заданий части 2, о чем свидетельствуют, например, результаты решения тригонометрического уравнения (около 9,3% выполнили задание 13 хотя бы на 1 балл). Наличие вычислительных навыков позволяет им относительно успешно справиться с частью 1 экзамена, но, начиная с задания 14, их результаты мало отличаются от результатов группы 1, то есть близки к нулевым значениям.

Группы 3–5 несколько увеличились и в абсолютной численности, и в процентном отношении.

Группа 3 характеризуется как группа участников экзамена, успешно освоивших базовый курс математики и способных обучаться на технических специальностях большинства вузов, не предъявляющих высоких требований к математическим знаниям абитуриентов. Эта группа участников выполняет задания 1–13 и 15, как правило, с небольшим количеством вычислительных ошибок.

Группа 4 – выпускники, имеющие уровень математической подготовки, достаточный для продолжения образования по большинству специальностей, требующих повышенной и высокой математической компетентности. Эта группа, в последние годы значительно укрепившая свои позиции в генеральной совокупности участников экзамена, составляет основу абитуриентов и успешных студентов технических вузов. При дальнейшем совершенствовании модели ЕГЭ следует ориентироваться на участников из этой группы как на основную целевую когорту.

Группа 5 по сравнению с 2020 г. также несколько выросла. Это выпускники, которые могут продолжать обучение при самых высоких требованиях к математической подготовке на технических и фундаментальных естественнонаучных и математических специальностях вузов. Но даже в этой, наиболее подготовленной, группе по прежнему требуется внимание повышению качества геометрической подготовки.

Рассматривая особенности выполнения заданий участниками экзамена из различных групп отметим следующее.

Задание 19 на 1 балл выполняют намного больше участников из группы со слабой подготовкой, чем решают тригонометрическое уравнение (позиция 13). Это говорит о том, что в этих группах есть участники, обладающие математической культурой, достаточной для того, чтобы разобраться в тексте абстрактной математической задачи, экспериментировать с натуральными числами или целыми последовательностями и найти пример, удовлетворяющий условию задачи. При этом эти участники не выполняют, казалось бы, простейших алгоритмов решения тригонометрических уравнений. Таким образом, проявляется существование заметной доли выпускников школ, которые не осваивают основную программу по математике, несмотря на то, что обладают более чем достаточными для этого математическими способностями.

Участниками группы с высоким уровнем подготовки по-прежнему задания по алгебре и началам анализы выполняются значительно лучше, чем геометрические задания. При этом достаточно ограничиться заданиями 13–19, поскольку задания 1–12 участники из этой группы выполняют практически полностью.

Конечно, задача 16 объективно сложная и требует немало времени на выполнение и анализ чертежа, поиск ключевых элементов конфигурации, решения множества вспомогательных подзадач.

Однако даже стандартная стереометрическая задача 14 у хорошо подготовленного и мотивированного участника экзамена занимает больше времени, чем, скажем, задача 17, которая требует объективно намного большего объёма обработки информации, иногда составления таблицы, применения нескольких алгоритмов и арифметических вычислений с многозначными числами. Следует предположить, что участник экзамена, выполняющий задание 17 и пропускающий задание 14 или выполняющий его с ошибкой, не видит стандартных алгоритмов, которые он мог освоить на уроках, поскольку при должной подготовке решение задачи 14 занимает в 1,5–2 раза меньше времени, чем задача 17 и не больше, чем задача 15.

Таким образом, наиболее подготовленные участники, которые заранее планируют время и выстраивают тактику решения задач на экзамене, относят решение стереометрической задачи на оставшееся время. Отработка стандартных алгоритмов построения сечения, нахождения элементов призмы, пирамиды ещё один серьезный ресурс повышения уровня математической подготовки выпускников.

Обращает на себя внимание «граница успешности» в самой многочисленной группе 2. Граница совпадает с границей между заданиями с кратким и развёрнутым ответами. Здесь возникает гипотеза о том, что значительное большинство участников из этой группы не обучено математической речи в той степени, которая необходима для ясного изложения мыслей при выполнении заданий с развёрнутым ответом. При этом уровень математического мышления, техника математических преобразований и вычислений у них могут быть достаточно развиты. Можно предположить также, что проблема кроется в злоупотреблении, причем начиная с основной школы, тестами, краткими ответами; при этом школьники имеют мало практики в записи развернутого решения, устных ответах. Такой школьник может решить несложное уравнение или неравенство, часто понимает математический смысл задачи, но в силу отсутствия практики не может ясно и последовательно записать решение, что приводит к невозможности решить более сложную комбинированную задачу.

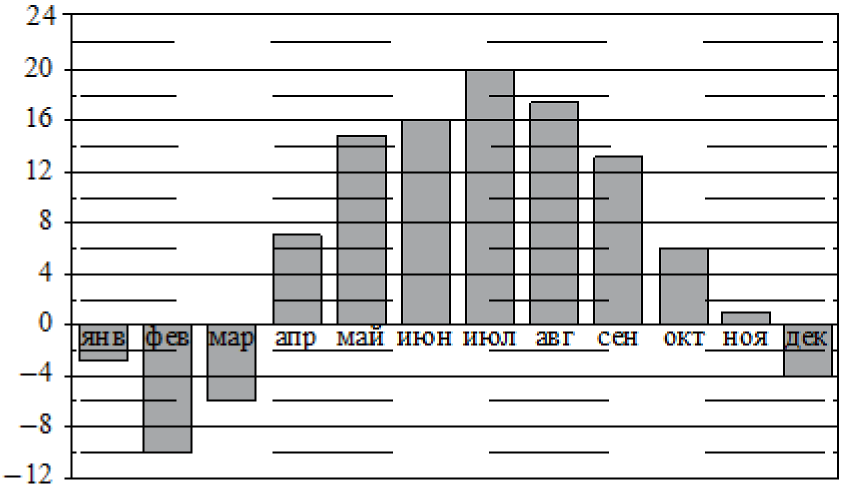
Для анализа и выработки рекомендаций отобраны задания, которые выполнены значимо хуже, чем аналогичные задания, бывшие в составе других вариантов, и задания, где наблюдались типичные, статистически заметные ошибки.

В анализ были включены также задания, при выполнении которых наблюдалось статистически заметное отсутствие ответа, а также задания, где проявившаяся ошибка участников ЕГЭ 2021 г. была не очень массовой, но свидетельствовала о вероятных серьёзных упущениях в методике преподавания математики.

Аналоги некоторых заданий описаны выше. Помимо разбора возможных ошибок, мы предложим некоторые общие методы решения.

Пример 20.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Москве за каждый месяц 2005 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме, сколько месяцев среднемесячная температура была меньше −8 градусов Цельсия.



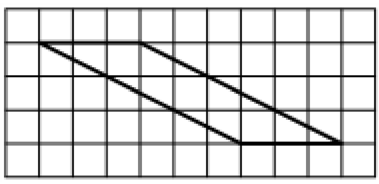
Комментарий.

Эта задача уже обсуждалась выше. Больше 9% ошибочных ответов к этой задаче может быть связано только со смешиванием точного и бытового значений слова «меньше». Работе с графиками и диаграммами уделяется много внимания, начиная с 4 класса. Такие задания сейчас можно встретить в проверочных работах для младшеклассников. Как не допустить неверной трактовки слов «меньше» и «больше». Мороз сильнее, чем $-8\,^\circ\mathrm{C}$, означает, что на улице температура меньше, чем $-8\,^\circ\mathrm{C}$, например, $-15\,^\circ\mathrm{C}$. Но ведь 15° мороза это больше, чем 8° мороза, если не обратить внимание на слово «мороз», что означает меньше нуля.

Чтобы избежать путаницы, предлагаем наряду со словами «меньше» и «больше» использовать слова «ниже» и «выше» как синонимы, подобно тому, как при обучении пользованию числовой прямой методика советует создать ассоциацию «левее – меньше», «правее – больше». Ассоциация «ниже – меньше», «выше – больше», как показывает практика, позволяет резко снизить вероятность неверной интерпретации условия.

Пример 21.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.



Комментарий.

Определённая сложность данного задания для слабо подготовленных участников заключалась в том, что «основание» параллелограмма более короткое, а «боковая сторона» длиннее. Абсолютное большинство чертежей в учебниках и в учебной практике изображают горизонтальную сторону параллелограмма более длинной или хотя бы такой, что высота, проведённая из вершины тупого угла, попадает внутрь стороны. Часть участников экзамена попыталась провести высоту «наискосок». Необходимо при изучении курса геометрии избегать наличия лишь «стандартных», «канонических» расположений фигур на чертежах, иметь в учебных материалах больше возможных форм и расположений фигур.

Пример 22.

4 В среднем из 140 садовых насосов, поступивших в продажу, 14 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос **не подтекает**.

Комментарий.

Эта задача на исчисление шансов традиционно вызывает трудности, связанные с формулировкой. Проблема здесь обычно не в математике, а в смысловом чтении. Как понять фразу «в среднем из N предметов n обладают определённым признаком»? Оборот «в среднем» значит, что в одной партии из 140 насосов течь могут 12, или 17, или даже все 140, а в другой будет другое количество, но если взять все возможные партии по 140 насосов (x таких партий, где x – чрезвычайно большое число), то во всех них вместе окажется $14x$ текущих насосов, а потому вероятность того, что случайно выбранный насос подтекает, равна $\frac{14x}{140x}=\frac{14}{140}=0{,}1$.

Таким образом, фраза «в среднем из N предметов n обладают определенным признаком» означает, что вероятность этого признака равна $\frac{n}{N}$.

Встречаются задачи, где фраза звучит иначе. Например, «на 140 качественных насосов приходится в среднем 14 некачественных». Смысл тот же, но общее количество насосов в партии здесь не 140, а $140+14=154$.

При подготовке к ЕГЭ и решению простейших задач по вероятности следует обращать внимание школьников на корректную интерпретацию условия, чёткого нахождения общего объёма совокупности, учить верно интерпретировать слова «в среднем» как указание на то, что речь идёт о средней доле, то есть о вероятности некоторого признака в данной совокупности.

Пример 23.

4 В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 22 из Японии, 13 из Китая, остальные из Кореи. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Кореи.

Комментарий.

Здесь типичная ситуация, когда случайный эксперимент описан: случайный выбор спортсменки, которая будет выступать первой. Элементарные исходы этого опыта – спортсменки, а всего их $N=50$. Событию A «Первая гимнастка из Кореи» благоприятствуют $N(A)=50-22-13=15$ элементарных исходов, то есть 15 гимнасток из Кореи.

Вероятно, при подготовке к ЕГЭ не следует спешить и, разбирая такие задачи, несколько раз нужно проговорить полную последовательность рассуждений, отвечая на вопросы.

1. В чём здесь заключается случайный опыт?
2. Что является элементарным событием (исходом) в этом случайном опыте?
3. В чём состоит событие A, вероятность которого следует найти?
4. Какие элементарные события благоприятствуют событию A? Как найти их количество?

После ответов на все эти вопросы применяется формула

$$\mathrm{P}(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{15}{50}=0{,}3.$$

Пример 24.

5 Найдите корень уравнения $(x-1)^3=216$.

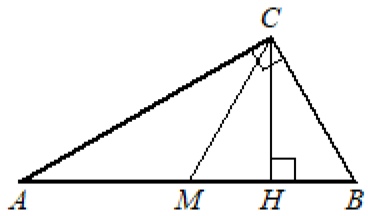
Комментарий.

Распространённые неверные ответы 5 (1,5%) и 6 (1%). Ответ 73, который получается при делении числа 216 на число 3 вместо извлечения корня лишь на четвёртом месте по популярности: 0,6%.

Таким образом, основным источником ошибки является уравнение $x-1=6$, которое, скорее всего, было бы решено абсолютно верно, если бы предлагалось само по себе. Ошибки возникают при попытке выполнить оба действия в уме: и извлечь корень, и «высвободить» x из полученного простейшего уравнения. Здесь работа учителя состоит в том, чтобы «поймать» такую ситуацию при подготовке и мягко и настоятельно посоветовать обучающимся не полагаться на простоту и лёгкость выполнения в уме. На экзамене лучше следовать простому правилу: всё проверяется дважды, и в каждый момент нужно выполнять только одно действие.

Пример 25.

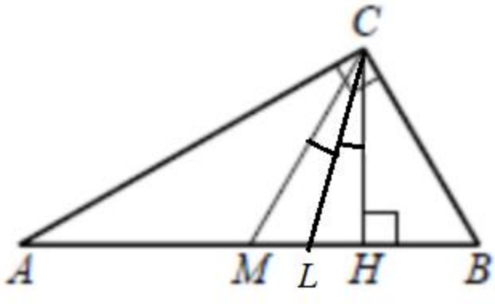
6 Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 59°. Найдите угол между высотой CH и медианой CM, проведёнными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах.



Комментарий.

Похожая или такая же задача уже комментировалась выше. Ряд участников экзамена считает, что $\angle MCH=\angle BCH$.

Обычный путь решения такой задачи состоит в последовательном поиске углов: $\angle BCH=\angle ACM=\angle A=31^\circ$, тогда $\angle MCH=90^\circ-2\cdot 31^\circ=28^\circ$. При решении используется, что треугольник AMC равнобедренный или, что то же самое, медиана MC равна половине гипотенузы.

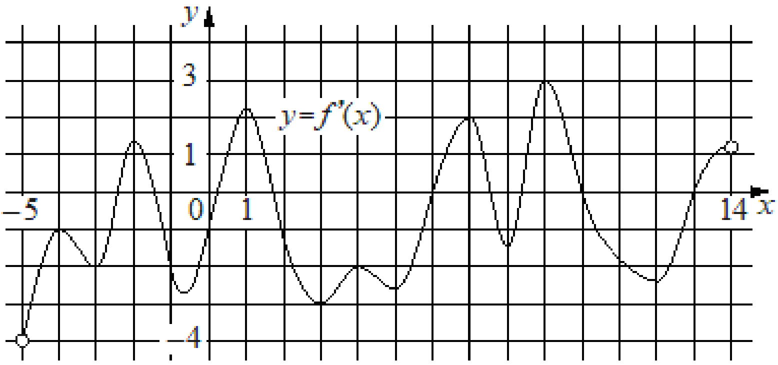


Здесь можно предложить обучающимся дополнительно факт, который многие легко запоминают: биссектриса делит пополам угол не только между катетами, но и между высотой и медианой. Само это утверждение можно использовать в качестве задачи для домашней работы. Оно встречается как задача во многих учебниках геометрии. С использованием этого факта решение становится чуть короче:

$$\angle LCH=45^\circ-\angle HCB=45^\circ-31^\circ=14^\circ,\ \angle MCH=2\cdot 14^\circ=28^\circ.$$

Пример 26.

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 14)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 9]$.



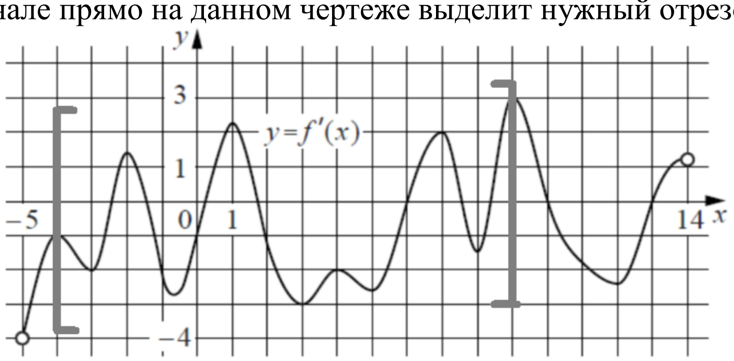
Комментарий.

В данной задаче проверяется знание того, какая точка является точкой минимума, – та, где производная меняет знак с «минуса» на «плюс» или наоборот. Для гарантированно верного решения этого вопроса обучающийся должен вспомнить о том, как именно знак производной определяет поведение функции и как именно устроена точка минимума. В этом нет ничего сложного, но большинство обучающихся по привычке вместо попыток представить себе поведение функции начинает вспоминать формулировку признака.

Опытные учителя для выработки умения предлагают два пути. Первый основан на понимании смысла, а второй – на опорном конспекте, где изображены парабола $y = x^2$ и её производная $y = 2x$.

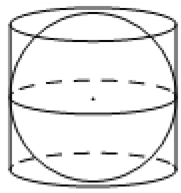
Ещё один элемент – выделение нужного отрезка. Многие участники экзамена забывают про это и решают задачу на всей области определения. Отсюда типичная ошибка. Решая эту задачу, ответ 5 дали около 31% экзаменуемых, а верный ответ – лишь 43%. Иными словами, точки минимума нашли примерно 74% выполнявших задание, но почти половина их них не учла ограничение.

Для подобных ситуаций существует известный методический приём: если есть возможность забыть что-то важное, начни с него. Ошибку по невнимательности не допустит тот, кто в самом начале прямо на данном чертеже выделит нужный отрезок.



Пример 27.

8 Цилиндр, объём которого равен 30, описан около шара. Найдите объём шара.



Комментарий.

Похожую задачу мы обсуждали выше. Здесь также подзадача знаменитой задачи Архимеда. Объёмы цилиндра, вписанного в него шара и конуса относятся как $3:2:1$. Значит, объём шара: $\frac{2}{3}\cdot 30 = 20$.

К сожалению, большинство выпускников решает эту задачу, используя заученные формулы объёма шара и объёма цилиндра. Для этой цели нужно учесть, что высота цилиндра вдвое больше радиуса шара: $h = 2R$, а также верно составить выражения, не ошибившись в формулах, найти отношение объёмов без ошибки в вычислениях. Столь длительный и многоэтапный процесс порождает множество ошибок. В результате ошибок, допущенных на разных этапах, неверный ответ дали около 45% выполнявших эту задачу.

Мы рекомендуем учителям знакомить обучающихся с красивым и простым фактом, ставшим классикой стереометрии. Известнейшая задача Архимеда: «объём вписанного в цилиндр конуса втрое, а шара – вдвое меньше объёма самого цилиндра». Доказательство этого факта, кроме стандартной алгебраической проверки, можно наглядно провести с помощью пространственного принципа Кавальери и получить из объёма цилиндра формулы объёма конуса и шара гораздо более простым способом, чем приведённым в учебнике.

Пример 28.

9 Найдите значение выражения $\frac{7\sin 154^\circ}{\cos 77^\circ \cdot \cos 13^\circ}$.

Комментарий.

Массовая ошибка здесь может быть только в подстановке $\sin 77^\circ \cdot \cos 77^\circ$ вместо $\sin 154^\circ$. Формальная тригонометрия – один из наименее наглядных разделов школьной математики. По этой причине варианты КИМ снабжены коротким справочником в начале, где приведены формулы тригонометрических преобразований, в частности формулы функций удвоенного аргумента. Зная об этом, многие участники экзамена не обращают внимания на тригонометрические формулы, не пытаются понять их устройство и логику, полагаясь на то, что на экзамене будет справочный материал. В результате – массовые ошибки. Справочник может лишь помочь избежать случайной ошибки тому, кто в процессе учебы освоил и отработал формулы.

Пример 29.

10 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 494 МГц. Скорость погружения батискафа v (в м/с) вычисляется по формуле $v = c\cdot\frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала (в МГц), регистрируемая приёмником. Определите частоту отражённого сигнала, если скорость погружения батискафа равна 18 м/с. Ответ дайте в МГц.

Комментарий.

Задача на анализ условия, подстановку данных и расчёт по формуле является одной из первых практико-ориентированных задач, вошедших в ЕГЭ. Основная проблема, связанная с этим заданием, – необходимость прочесть целый абзац текста из семи строк и, мало того, ещё и разобраться в назначении каждой величины и её месте в формуле. Затем нужно выразить неизвестную величину через известные. Именно в этой задаче трудность состоит в том, что неизвестная величина f входит в равенство дважды:

$$18 = 1500\cdot\frac{f - 494}{f + 494}.$$

Иными словами, от участника экзамена требуется умение решить простейшее рациональное уравнение с неизвестной и в числителе, и в знаменателе дроби. Видимо, необходимость в дополнительном действии – умножении обеих частей уравнения на знаменатель – и приводит к затруднениям части участников: около 30%, решавших задачу, не дали никакого ответа. Массовая ошибка связана с отсутствием вычислительного навыка. Ответ 56 вместо 506 дали почти 12% экзаменуемых. Есть ещё, правда немного, ответы 5,6, 0,012.

Интересно, что если выпускников, давших такие ответы, спросили бы, сильно ли может измениться частота отражённого сигнала, то большинство сказало бы, что нет, ведь скорость батискафа намного меньше скорости звука. Значит, ответ 56 показался бы им неправдоподобным. Они ждали бы число, не очень далекое от 494, если бы ничего не вычисляли. Однако они дали именно этот ответ после вычислений. Так проявляется отсутствие функциональной математической грамотности и навыков осмысления всей ситуации и соотнесения результата с ожиданием. Если бы учитель при разборе таких задач выстроил бы правильную последовательность вопросов, то таких ошибок было бы намного меньше.

1. Почему меняется частота? (Батискаф движется вниз, навстречу отраженному звуку.)
2. Быстро ли движется батискаф? (18 м/с, то есть немногим быстрее 60 км/ч.)
3. Какова скорость звука? (1500 м/с, то есть 5400 км/ч.)
4. Велика ли скорость батискафа по сравнению со скоростью звука? (Мала.)
5. Намного ли будет отличаться скорость отражённого сигнала от скорости испускаемого сигнала с точки зрения того, кто сидит в батискафе? (Нет.)
6. Сильно ли может измениться частота? (Нет.)
7. Она будет больше или меньше, чем была? (Батискаф идёт навстречу отражённой звуковой волне, поэтому частота вырастет.)
8. Какие из значений 10, 494, 420, 1000, 560, 56, 0,12? (Из этих только 560.)

Аналогичный приём можно и нужно использовать при решении большинства практико-ориентированных задач, где возможна разумная прикидка результатов. Легко прикинуть возможную стоимость после уценки или наценки, зарплату после вычета налогов, высоту лестницы, стоящей у окна второго этажа, и т.п.

Пример 30.

11 Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 7 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 72 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 30 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Комментарий.

Как известно, текстовые задачи на совместное движение или работу относятся к «сердцевинам» школьной математики. Здесь обучающийся должен продемонстрировать множество умений: построить модель в виде уравнения, системы уравнений или последовательности вычислений; исследовать эту модель (решить уравнение) и интерпретировать результат (понять, что получилось и что писать в ответ).

Традиционно в ЕГЭ эта задача входит в набор задач с кратким ответом. Сделано это специально, чтобы при проверке у экспертов не возникали разногласия на тему обоснованности решения. В самом деле, вглядимся в задачу и оценим такое решение.

«*Ясно, что скорость первого автомобиля не очень сильно меньше, чем 72 км/ч. Предположим, что она равна 63 км/ч. Тогда первый автомобиль прошёл весь путь протяженностью* $2S$ *за* $\frac{S}{56}+\frac{S}{72}=\frac{2S}{63}$ *ч, что в точности равно времени, затраченному вторым автомобилем. Значит, скорость второго автомобиля действительно равна 63 км/ч, и* *других вариантов быть не может в силу монотонности функции* $f=\frac{2}{x}-\frac{1}{x-7}$ *при* $x>30$».

Даже это, логически безукоризненное решение, скорее всего, вызвало бы бурю протестов и было бы сочтено необоснованным. Что уж говорить про решение, не содержащее доказательства единственности значения 63, найденного подбором? А ведь наиболее подготовленные участники экзамена решают задачу именно так, поскольку они экономят свой главный ресурс экзамена – время.

Составление уравнения для решения этой задачи с помощью таблицы или схемы – рутинная операция, которую успешно осваивают 30–50% обучающихся при довольно значительных и длительных усилиях учителя.

Покажем приём, который успешно работает именно в этом случае. Известно, что средняя скорость равна среднему гармоническому скоростей на равных частях пути. Тогда, приняв неизвестную скорость за x, сразу получаем уравнение

$$\frac{2}{\frac{1}{x-7}+\frac{1}{72}}=x.$$

Заметим, что приём работает, только если участки пути равны (полпути и полпути, как в этой задаче, например).

Пример 31.

12 Найдите точку минимума функции $y=5x-5\cdot\ln(x-2)+7$.

Комментарий.

Задача требует владения понятием «производная». Важно учитывать, что избавление от константы и деление на константу не влияют на характер поведения функции: возрастание остаётся возрастанием, убывание – убыванием. Поэтому можно исследовать чуть более простую функцию: $y=x-\ln(x-2)$, производная которой: $y'=1-\frac{1}{x-2}$ при $x>2$ и обращается в нуль в единственной точке $x=3$. Остаётся на всякий случай проверить, что эта точка и есть точка минимума, а именно в ней производная меняет знак с «минуса» на «плюс». Это можно сделать без подсчётов, вообразив себе схему графика функции $y=-\frac{1}{x-2}$. Эта функция возрастает, а потому пересекает прямую $y=1$ как раз «снизу вверх».

Важно как можно чаще привлекать наглядность, геометрические образы и естественные соображения для решения, казалось бы, совершенно абстрактных задач.

Пример 32.

13 а) Решите уравнение

$$4\sin x\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin 2x+3\sin x=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

Комментарий.

Абсолютное большинство школьников, приступающих к решению этой задачи, совершенно верно выполняет преобразования с использованием функций удвоенного аргумента, формул приведения, реже – формул суммы или разности тригонометрических функций, без которых, кстати, всегда можно обойтись. В результате всех преобразований уравнение приводится к совокупности простейших тригонометрических уравнений.

В данном случае получается совокупность уравнений

$$\sin x = 0 \text{ и } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решая их по отдельности, находим: $x = \pi k,\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где k – произвольное целое число. Можно использовать одну и ту же букву для целого параметра, или в каждой серии должна быть своя буква? Ответ прост: можно использовать одну букву, поскольку x может быть из одной серии, может быть из другой, но не обязана принадлежать двум или трём сериям сразу, как было бы, если бы мы решали систему тригонометрических уравнений.

Отбор корней с помощью числовой окружности также не представляет трудностей, если участник понимает, где на окружности находятся найденные им серии решений и отрезок (дуга), на котором лежат корни. При отборе корней с помощью тригонометрической окружности на ней должны быть: начало и конец дуги (отмечены и подписаны на окружности), выделение (любым способом) рассматриваемой дуги, корни (отмечены и подписаны на окружности), принадлежащих этой дуге, при этом на дуге могут быть отмечены дополнительные точки, принадлежащие данной дуге. Вероятно, именно в пункте *б* и содержалась основная трудность этой задачи. 14% всех участников, решавших эту задачу, решили уравнение, но меньше половины из них справились с отбором корней.

Метод отбора корней с помощью числовой окружности нагляден и требует минимум вычислений. Однако, когда отрезок расположен довольно далеко от нуля, вычисления точек окружности становятся для многих обучающихся непреодолимым препятствием. Вероятно, есть смысл в отборе корней с помощью неравенств в тех случаях, когда это неудобно делать на окружности.

Трудно предложить альтернативное, более простое решение именно этого или подобного этому тригонометрического уравнения, однако встречаются тригонометрические уравнения, которые легко приводятся к уравнениям вида $\cos f = \cos g$ или подобным уравнениям с синусом или тангенсом. Пример: нужно решить уравнение $2\cos^2 x - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 1$. После преобразований получаем: $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} + x\right)$, то есть $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Вместо применения формулы разности косинусов можно сразу написать, что аргументы либо равны, либо отличаются знаком с точностью до периода:

$$2x = x - \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ или } 2x = -x + \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \text{ где } k \text{ – произвольное целое число,}$$

поскольку числа $2x$ и $x - \frac{\pi}{6}$ изображаются на единичной окружности либо одной и той же точкой, либо двумя точками, симметричными друг другу относительно оси абсцисс.

Не составит труда обосновать и написать похожий способ решения уравнений, приводящихся к равенству синусов или тангенсов.

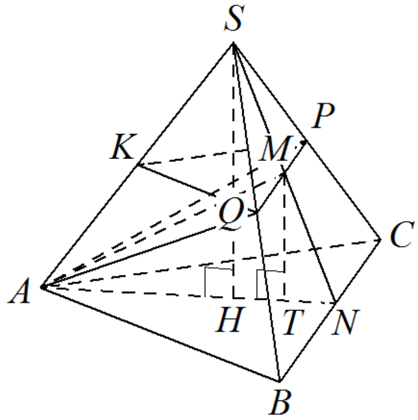
Пример 33.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, высота SH равна 21. Точка K — середина бокового ребра SA, а точка N — середина ребра BC. Плоскость, параллельная плоскости ABC, проходит через точку K и пересекает рёбра SB и SC в точках Q и P соответственно.

а) Докажите, что прямая QP пересекает отрезок SN в его середине.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и AQP.

Комментарий.



Доказательство утверждения пункта *а* сводится к применению теоремы о средней линии треугольника и обратной к ней вначале к треугольникам SAB и SBC, а затем к треугольнику SBN. Это стандартный элемент решения задач, связанных с пирамидой, которому обучающийся должен быть научен. Теорема о средней линии является одним из универсальных и наиболее наглядных фактов. Тем обиднее, что доказательство успешно провели лишь 8% участников, решавших соответствующий вариант, особенно учитывая, что 25% этих участников получили 1 балл за задание 19, иными словами, обладали вполне достаточной математической подготовкой, чтобы изобразить пирамиду и увидеть на ней срединное сечение, создающее три средние линии трёх боковых граней. Это иллюстрация «перекоса» в подготовке к экзамену, когда учителя откладывают геометрию на последний момент, создавая у обучающихся дополнительные трудности.

Пункт *б* в этой задаче сводится к поиску угла MAN и доказательству того, что этот плоский угол искомый. Однако многие учителя показывают обучающимся довольно эффективный приём, связывающий угол между плоскостями и площадей фигур в этих плоскостях: если в одной плоскости лежит фигура, а в другой – прямая проекция этой фигуры, то отношение площади проекции к площади самой фигуры равно косинусу угла между плоскостями. Это полный аналог такого же свойства отрезков на плоскости.

В данном случае $\cos\alpha = \dfrac{S_{\text{проекц. } AQP}}{S_{AQP}}$, где α – угол между плоскостями. Это соотношение позволяет быстро получить результат. Методический опыт показывает, что обобщение свойства прямоугольного треугольника на пространственный случай усваивается значительной частью обучающихся без труда и служит хорошим примером аналогий, на которых строится как первичное обучение, так и закрепление ранее изученного.

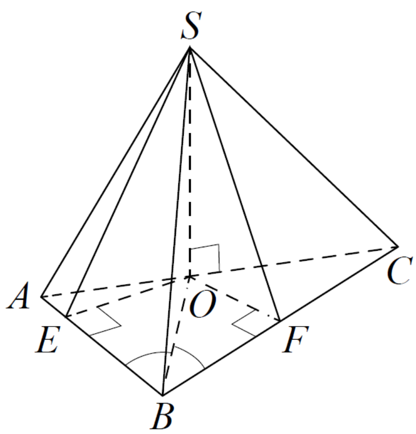
Пример 34.

14 Отрезок SO — высота треугольной пирамиды $SABC$, причём точка O лежит на ребре AC. Луч BO — биссектриса угла ABC.

а) Докажите, что расстояния от точки S до прямых AB и BC равны.

б) Найдите объём пирамиды $SABC$, если $AB = 10$, $BC = 20$, $AC = 18$, $SA = 6\sqrt{5}$.

Комментарий.



Это пример ещё одной задачи на 14 позиции, вызвавшей затруднения в большей степени, чем другие или аналогичные задачи. Вероятно, затруднения вызвала интерпретация фразы «точка O лежит на ребре AC». Привыкнув к правильным пирамидам, школьнику бывает трудно вообразить, что высота пирамиды может оказаться одновременно высотой боковой грани. При обучении нужно разнообразить геометрические конфигурации, давая одну и ту же или близкие задачи на геометрически разных конфигурациях.

В последние десятилетия из школьной практики ушли задачи по геометрии, где величины давались не числовые, а в общем виде. Например, в данной задаче можно было бы полагать, что $AB=a,\ BC=b$ и т.д. Мало того, что числовые данные не способствуют безошибочному счёту, они ещё и не позволяют учащемуся обнаружить ошибку. Действительно, в выражении для объёма $\frac{a^2h\sqrt{b^2-c^2}}{2}$ сразу видно ошибку – не совпадает размерность. Опыт показывает, что, научившись раз проводить вычисления в общем виде, многие обучающиеся начинают предпочитать именно такой способ решения задач по геометрии.

Пример 35.

15 Решите неравенство $\left(25^x-4\cdot5^x\right)^2+8\cdot5^x<2\cdot25^x+15.$

Комментарий.

Трудности при решении этой задачи возникали у тех, кто не увидел подходящую замену переменных для разложения на множители.

Можно сделать замену $5^x=y$. Это стандартная замена, которую сразу видят почти все. Важно не торопиться раскрывать скобки: $\left(y^2-4y\right)^2-2\left(y^2-4y\right)-15<0$; возможно, для разложения на множители потребуется ещё одна замена: $y^2-4y=t$. Большинство решавших это задание, получив квадратное неравенство $(t-5)(t+3)<0$, сразу же переходило к системе квадратных неравенств: $y^2-4y>-3$ и $y^2-4y<5$ – и только потом перешло к простейшим показательным неравенствам.

Если же сделать замену $y=25^x-4\cdot5^x$, решение становится короче: $y^2-2y-15<0$, но дальше в основном делаются те же шаги: решается система квадратных неравенств, и осуществляется переход к простейшим показательным неравенствам.

Очень редко встречались решения, когда с использованием той или иной замены (чаще обеих) левая часть неравенства раскладывалась на множители: $(t+1)(t-5)(t-1)(t-3)<0$, где $t=5^x$, а далее решалось неравенство с использованием метода интервалов, и полученные неравенства сводились к простейшим показательным неравенствам.

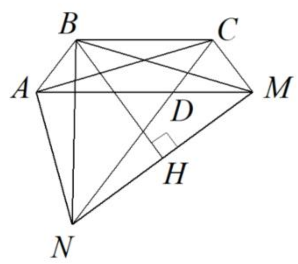
При решении такого типа неравенств у выпускников возникли трудности не с решением показательных неравенств, а с решением алгебраического неравенства и с выполнением алгоритма метода интервалов.

Пример 36.

16 В параллелограмме $ABCD$ угол A острый. На продолжения
и CD за точку D выбраны точки M и N соответственно, при
и $CM=CD$.

а) Докажите, что $BN=BM$.

б) Найдите MN, если $AC=5$, $\sin\angle BAD=\frac{5}{13}$.



Комментарий.

Задание 16 объективно более сложное, чем задание 14, поскольку использует намного более изощрённую, хотя и планиметрическую, конфигурацию. Именно эта задача могла вызвать трудности кажущейся легкостью постановки вопроса. Требуется доказать равенство отрезков BN и BM. Эти отрезки имеют общий конец, поэтому очень многие участники экзамена из тех, кто взялся за эту задачу, стали искать способ показать равенство углов BNM и BMN. Несложно было доказать, что трапеции $ABCM$ и $ABCN$ равнобедренные, а потому их диагонали равны. Но этот способ доказательства равенства отрезков трудно отнести к таким типичным методам, как, скажем, применение свойств равнобедренного треугольника или средней линии.

Геометрии научить гораздо сложнее, чем комбинированию алгебраических алгоритмов. Тем важнее тщательно выстраивать систему уроков по геометрии в основной школе и находить возможность «вплетать» исследование планиметрических конфигураций в систему итогового повторения и обобщения материала в выпускных классах.

Пример 37.

17 15 января 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 1200 тысяч рублей на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й (с февраля по ноябрь 2025 года включительно) долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— 15 ноября 2025 года долг составит 400 тысяч рублей;

— 15 декабря 2025 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Комментарий.

Задание 17, некоторое время назад считавшееся сложным, уже показывает высокий уровень выполнения. Большинство из тех, кто брался за задачу, верно составляли арифметическую модель последовательности платежей и выясняли, что она является арифметической прогрессией. Основной проблемой в решении таких задач стали вычислительные ошибки, причем ошибки на порядок или два. Обращаем внимание на прикладной характер задачи. При подготовке опять годится метод внимательного рассмотрения ситуации. В долг клиент берет в банке 1 млн 200 тыс. рублей. Может ли сумма, которую он возвращает в банк, быть меньше или превосходить взятую сумму на порядок? Очевидно нет. Задав себе эти вопросы, участник экзамена может допустить ошибку в счёте, но вероятность вовремя её обнаружить многократно возрастает, так как он не оставит без анализа собственные результаты: 15 млн рублей или 7 тыс. рублей, либо им подобные. Обращаем внимание на то, что в задачах, имеющих прикладной или практический характер, очень часто можно выстроить систему подготовки на наводящих вопросах – ответах, заставляющих обучающегося волей-неволей производить прикидку результата задолго до проведения вычислений.

Пример 38.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 - a^2\right| + 14 = 2\left|x - a\right| + 7\left|x + a\right|$$

имеет ровно два различных положительных корня.

Комментарий.

Замена переменных $y = |x-a|,\ z = |x+a|$ немедленно приводит к уравнению $yz + 14 = 2y + 7z$, откуда $(y-7)(z-2) = 0$. Дальнейшее исследование не представляет труда для подготовленного учащегося. Однако опыт показывает, что даже те выпускники, которые успешно и плодотворно выполняют замену переменных при решении тригонометрических уравнений или показательных неравенств, не видят возможности замены в подобных задачах. На уроках математики нужно обращать внимание на то, что та или иная задача решается тем или иным методом и существуют разные способы, методы, приёмы, которые можно комбинировать, чтобы пытаться решить разные задачи. Не задача – под метод, а, напротив, методы – для задач, желательно мотивированных и естественных. К сожалению, в большинстве учебников и учебных пособий сначала предлагается теорема или факт, а затем – задачи, которые можно решить с помощью этой теоремы.

Пример 39.

19 На доске написаны три различных натуральных числа. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 2022?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 2021?

в) В тройке чисел первое число трёхзначное, а третье равно 2. Сколько существует таких троек?

Комментарий.

Последняя задача КИМ ЕГЭ доступна всем выпускникам, поскольку даже слабый участник экзамена, имея достаточно времени, но не имея возможности и способностей к решению большинства задач части 2, успешно находит пример к одному из пунктов этого задания. В данном случае, начав с экспериментов с произвольными числами, мы довольно быстро обнаруживаем закономерность и очевидные ограничения. Первое число четырёхзначное. Потому что если в нём меньше четырёх цифр, то второе число не больше 29, причём оно довольно близко к 2000. А если попробовать с конца? Если третье число равно 2, то второе будет 11, а первое: $2022-2-11=2009$. Пункт *а* задачи 19 решен.

Более «продвинутый» путь состоит в том, что участник экзамена знает или замечает, что само число и его сумма цифр всегда дают один и тот же остаток от деления на 9. Поскольку сумма трёх чисел даёт остаток 6, каждое число по отдельности должно давать остаток 2.

Это же соображение дает ключ к решению пункта *б*. Сумма остатков от деления на 9 трёх чисел, написанных на доске, должна делиться на 3 и одновременно иметь тот же остаток от деления на 9, что и число 2021, то есть 5. Эти два условия несовместны, противоречие.

Теперь уже ясно, что решение пункта *в* сводится к поиску второго числа. Этим числом может оказаться 11 или 20. Остается перебрать трёхзначные числа с суммой цифр 11 или 20. Их не так много, а их перечисление сводится к суммированию арифметической прогрессии.

Пример 40.

19 Отношение трёхзначного натурального числа к сумме его цифр — целое число.

а) Может ли это отношение быть равным 11?

б) Может ли это отношение быть равным 5?

в) Какое наибольшее значение может принимать это отношение, если число не делится на 100 и его первая цифра равна 7?

Комментарий.

Покажем только, как подобрать решение к пункту *а*. Пусть первая цифра равна 1. Тогда трёхзначное число равно $100+10b+c$, а сумма цифр равна $1+b+c$. Отношение будет равно 11, если

$$100+10b+c=11+11b+11c,$$

откуда $89-b-10c=0$. Тогда $10c+b=89$, $c=8$ и $b=9$. Число 198 имеет сумму цифр 18, и $198=11\cdot 18$.

Уникальная открытость и прозрачность ЕГЭ в России, в частности наличие открытых банков заданий, позволили активно внедрить онлайн-тренажёры, которые резко повысили эффективность итогового повторения и подготовки к экзамену с учётом индивидуальных образовательных траекторий каждого участника экзамена. Это обусловливает снижение количества допущенных участниками ЕГЭ вычислительных и технических ошибок при выполнении заданий с кратким ответом и заполнением бланков.

Вместе с тем следует отметить, что изучение математики в старшей школе должно строиться не только на выполнении заданий из открытого банка ЕГЭ. Для успешного решения заданий с развёрнутым ответом необходимы не только хорошая математическая база, но и умения проводить логические рассуждения, чётко и грамотно излагать свои мысли. Для формирования этих умений необходимо участие квалифицированного учителя, такую подготовку невозможно осуществлять в режиме тренажера. Хорошо заметны успехи выпускников образовательных организаций из регионов, где уделяется большое внимание реализации программ углубленного изучения математики, сопровождению процесса обучения адресным повышением квалификации и методической поддержкой учителя.

Повышение успешности решения типовых геометрических задач возможно при включении в процесс обучения решения задач, требующих «видения геометрических фигур», развития геометрической интуиции, что требует перенести акцент в преподавании геометрии в основной и старшей школе с заучивания определений и решения большого количества технических вычислительных задач на решение содержательных геометрических задач, развивающих видение геометрических конструкций.

По-прежнему существенным резервом остаётся неумение ряда выпускников использовать математические знания и математический аппарат при решении практических задач.

Модель профильного ЕГЭ по математике не менялась несколько лет. В 2015 г. произошло разделение общего ЕГЭ на экзамены базового и профильного уровней. При этом профильный экзамен унаследовал практически все задачи и черты предшествующего ему общего экзамена. К тому же были заложены важные практико-ориентированные акценты, соответствующие ФГОС.

Переход на проведение государственной итоговой аттестации в соответствии с требованиями ФГОС, изменение качественного состава участников ЕГЭ базового и профильного уровней, смещение акцентов в требованиях вузах к математической подготовке абитуриентов диктуют необходимость совершенствования экзаменационной модели ЕГЭ по математике и перехода на обновлённую модель в 2022 г. В 2020/21 учебном году перспективная модель профильного экзамена, содержащая задания по комплексной арифметике и усиленную вероятностную линию, прошла общественное обсуждение. Разработка модели профильного и базового ЕГЭ 2022 г. происходила с учётом результатов апробации, замечаний, полученных от региональных органов управления образованием, методических служб и региональных общественных учительских организаций.

Модель 2022 г. экзамена является естественным развитием прежней.

Важно отметить, что из экзамена профильного уровня исключены наиболее простые задания, которые решали практически все участники, показывающие неплохие результаты на экзамене. Это позволит участнику лучше показать свой уровень подготовки, необходимый для продолжения образования в вузе, избегая случайных ошибок в простых задачах.

В 2022 г. экзаменационная модель **ЕГЭ по математике профильного уровня** претерпит следующие изменения, прошедшие апробацию и общественное обсуждение.

Внесены изменения в структуру КИМ:

1) часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом: содержит 6 заданий базового уровня (задания 1–6) – уменьшен вес заданий базового уровня сложности – и 5 заданий повышенного уровня (задания 7–11);
2) часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом;
3) количество заданий уменьшено на одно и стало равным 18;
4) изменены порядковые номера заданий обеих частей.

Внесены изменения в содержание КИМ:

Удалены:

1) задания 1 и 2, проверяющие умения использовать приобретённые знания и умения в практической и повседневной жизни;

2) задание 3, проверяющее умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.

Добавлено:

1) задание 9, проверяющее умения выполнять действия с функциями;

2) задание 10, проверяющее умение моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий.

Внесены изменения в систему оценивания:

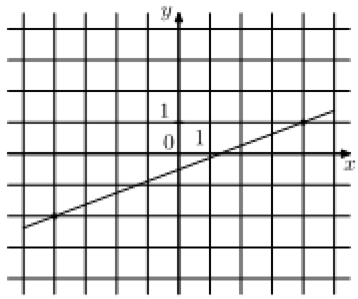
1) максимальный балл за выполнение задания 13, проверяющего умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами, повышенного уровня, – 3 балла;

2) максимальный балл за выполнение задания 15, проверяющего умение использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, повышенного уровня, – 2 балла.

В КИМ добавлено задание, проверяющее умение выполнять действия с линейными, квадратичными, дробно-рациональными, иррациональными, логарифмическими, показательными функциями. Приведём примеры таких заданий.

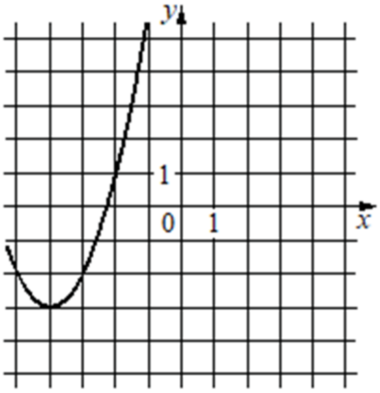
Пример 41.

На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите $f(12)$.



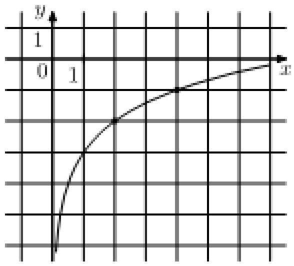
Пример 42.

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c целые. Найдите значение $f(-12)$.



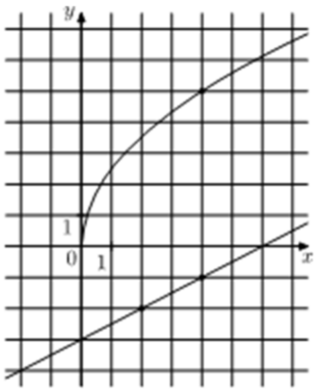
Пример 43.

На рисунке изображён график функции $f(x)=b+\log_a x$. Найдите $f(32)$.



Пример 44.

На рисунке изображены графики функций $f(x)=a\sqrt{x}$ и $g(x)=kx+b$, которые пересекаются в точке A. Найдите ординату точки A.



Для выполнения этих заданий нужно найти на рисунке точки с двумя целочисленными координатами, принадлежащие графику, составить систему уравнений для нахождения коэффициентов и ответить на поставленный вопрос.

В КИМ добавлено задание, проверяющее умения моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий. Приведём примеры таких заданий.

Пример 45.

Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,5. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно три мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно две мишени»?

Пример 46.

Стрелок в тире стреляет по мишени. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,3 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать этому стрелку, чтобы вероятность поражения цели была не менее 0,6?

Пример 47.

Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысит число 3. Какова вероятность того, что для этого потребуется ровно три броска? Ответ округлите до сотых.

Пример 48.

Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало три очка»?

Пример 49.

В городе 48% взрослого населения мужчины. Пенсионеры составляют 12,6% взрослого населения, причем доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Для успешного выполнения этих заданий нужно больше уделить внимания качественному обучению теории вероятностей и статистики.

Указанные изменения в ЕГЭ по математике профильного уровня позволят участникам экзамена лучше продемонстрировать свою готовность к продолжению образования в вузах с различным уровнем требований к математической подготовке абитуриентов; таким образом, усиление внимания при итоговом повторении на работу с функциями и их графиками, пониманию основ вероятности и статистики позволит выпускникам школы не только показать хороший результат на ЕГЭ, но и более успешно учиться в выбранном вузе.

Экзамен базового уровня в 2021 г. не проводился. В 2022 г. экзаменационная модель **ЕГЭ по математике базового уровня** претерпит следующие изменения, прошедшие апробацию и общественное обсуждение.

Внесены изменения в структуру КИМ:

1) количество заданий увеличено на одно и стало равным 21;
2) изменены порядковые номера заданий.

Внесены изменения в содержание КИМ:

Удалено задание 2, проверяющее умение выполнять вычисления и преобразования (данное требование внесено в позицию задачи 7 в новой нумерации).

Добавлено:

3) задание 5, проверяющее умения выполнять действия с геометрическими фигурами;
4) задание 20, проверяющее умения строить и исследовать простейшие математические модели.

Внесено изменение в систему оценивания: максимальный балл за выполнение всей работы стал равным 21.

Указанные изменения в ЕГЭ по математике базового уровня усиливают акцент на практическое применения математических знаний при изучении школьного курса математики, в повседневной жизни в цифровом мире, для продолжения образования и работе в массовых профессиях.

Методическую помощь учителям и обучающимся при подготовке к ЕГЭ могут оказать материалы с сайта ФИПИ (www.fipi.ru):

- документы, определяющие структуру и содержание КИМ ЕГЭ 2022 г.;
- открытый банк заданий ЕГЭ;
- Навигатор самостоятельной подготовки к ЕГЭ (fipi.ru);
- Учебно-методические материалы для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ;
- Методические рекомендации на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ прошлых лет (2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020 гг.);
- Методические рекомендации для учителей школ с высокой долей обучающихся с рисками учебной неуспешности (fipi.ru);
- журнал «Педагогические измерения»;
- Youtube-канал Рособрнадзора (видеоконсультации по подготовке к ЕГЭ 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021 гг.).

Приложение

Основные характеристики экзаменационной работы ЕГЭ 2021 г. по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень)

Анализ надёжности экзаменационных вариантов по математике (профильный уровень) подтверждает, что качество разработанных КИМ соответствует требованиям, предъявляемым к стандартизированным тестам учебных достижений. Средняя надёжность (коэффициент альфа Кронбаха) КИМ по математике (профильный уровень) – 0,81.

№	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки	Коды проверяемых элементов содержания	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Средний процент выполнения
1	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1	1.1.1, 1.1.3, 2.1.12	Б	1	96,0
2	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	3.1, 6.2	3.1–3.3, 6.2.1	Б	1	96,9
3	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1	5.1, 5.5	Б	1	91,9
4	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.4	6.3	Б	1	92,9
5	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1	2.1	Б	1	95,0
6	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1, 5.2	5.1.1–5.1.4, 5.5.1–5.5.5	Б	1	70,6
7	Уметь выполнять действия с функциями	3.1–3.3	4.1–4.3	Б	1	58,8
8	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.2	5.2–5.5	Б	1	66,3
9	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1–1.3	1.1–1.4	П	1	68,8
10	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1–6.3	2.1, 2.2	П	1	78,3
11	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1	2.1, 2.2	П	1	53,8
12	Уметь выполнять действия с функциями	3.2, 3.3	4.1, 4.2	П	1	55,5
13	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1–2.3	2.1, 2.2	П	2	36,1
14	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.2, 4.3, 5.2, 5.3	5.2–5.6	П	2	7,2
15	Уметь решать уравнения и неравенства	2.3	2.1, 2.2	П	2	22,3
16	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1, 5.2, 5.3	5.1	П	3	3,5
17	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1, 6.3	1.1.1, 1.1.3, 2.1.12	П	3	19,0
18	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1–2.3, 5.1	2.1, 2.2, 3.2, 3.3	В	4	2,0
19	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1, 5.3	1.1–1.4	В	4	11,4